Απειροστικός Λογισμός Ι

Τελική Εξέταση – 23 Ιανουαρίου 2017

1. (0.5+0.5+1 μον.) (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $x < (1+\varepsilon)y$. Αποδείξτε ότι $x \leqslant y$.

(β) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\max$, $\min$, $\sup$ και $\inf$ του συνόλου $B = \left\{(-1)^n \frac{n}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(γ) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $\alpha \in A$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε: κάθε x_n είναι άνω φράγμα του A και $x_n \to \alpha$. Αποδείξτε ότι $\alpha = \max A$.

2. (1+1 μον.) (α) Για καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το όριό της. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad \beta_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad \gamma_n = n^2 \text{ημ}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

3. (2 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν $\alpha_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R}$ τότε $\sqrt[n]{\alpha_n} \to 1$.

(β) Αν $\beta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\beta_n \to \beta > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $\beta_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$.

(δ) Αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο $\xi \in \mathbb{R}$ τότε η g είναι συνεχής παντού.

4. (1+1 μον.) (α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη. Παίρνει η f (απαραίτητα) μέγιστη τιμή;

5. (0.8+1.2 μον.) (α) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x_0) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι η f' είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι: είτε η f είναι σταθερή ή υπάρχει διάστημα $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι γνησίως μονότονη.

6. (0.5+1.5 μον.) (α) Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και αύξουσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \text{ημ}\frac{1}{x} & \text{, αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{, αν } x = 0 \end{cases}$.

(i) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και εξετάστε τη συνέχεια της f'.

(ii) Αποδείξτε ότι $f'(0) > 0$ αλλά για κάθε $\delta > 0$ η f δεν είναι αύξουσα στο $(-\delta, \delta)$.

Καλή Επιτυχία!