**Απειροστικός Λογισμός Ι**
17 Ιανουαρίου 2018

**1. (1+1.5+0.5=3 μον.)**

(α) Να βρεθούν τα sup, inf, max και min (αν αυτά υπάρχουν) των συνόλων

$$A = \left\{ 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\} \text{ και } B = \left\{ 3 + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{5^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά, άνω φραγμένα. Θέτουμε $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ και $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

(γ) Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $a_1, \ldots, a_n > 0$ έχουμε ότι $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

**2. (2+1=3 μον.)**

(α) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες

$$\alpha_n = \frac{4^n\, n!}{n^n}, \quad \beta_n = (\sqrt[n]{2} - 1)^n, \quad \gamma_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n, \quad \delta_n = \frac{1}{2n} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + (2n)^n}.$$

(β) Έστω $(a_n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η $(a_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Δείξτε ότι η $(a_n)$ είναι συγκλίνουσα.

**3. (1.5+0.75+0.75=3 μον.)**

(α) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια και την παραγώγιση τη συνάρτηση $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με

$$f(x) = \begin{cases} x^2\big(2 + \sin(x)\big) & \text{αν } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(β) (i) Δώστε τον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Δείξτε με χρήση του ορισμού ότι η συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη*: χρησιμοποιήστε ότι $|\sin(t)| \leqslant |t|$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.]

**4. (1+1.5=2.5 μον.)**

(α) Έστω $f \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} |f(2x) - f(x)| = 0$.

(β) Έστω $f, g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει $y \in [0,1]$ ώστε $f(x) \leqslant g(y) + \varepsilon$. Δείξτε ότι $\max(f) \leqslant \max(g)$, όπου $\max(f) = \max\{f(t) : t \in [0,1]\}$ και $\max(g) = \max\{g(t) : t \in [0,1]\}$.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**