Πανεπιστήμιο Αθηνών - Τμήμα Μαθηματικών

Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙ - 4 Φεβρουαρίου 2020

1. ($4 \times 0,5 = 2$ μον.) (α) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις. Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

(i) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ να συγκλίνει.

(iii) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{3/2}$.

(β) Να δώσετε παράδειγμα ακολουθιών (a_n), (b_n) με την ιδιότητα

$$\limsup(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n$$

2. ($4 \times 0,5 = 2$ μον.) (α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} \qquad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}}$$

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει απολύτως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin \frac{1}{k}$. Αν όχι, εξετάστε αν αυτή συγκλίνει υπό συνθήκη.

3. ($1,2 + 0,8 = 2$ μον.) (α) Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι Lipschitz συνεχής αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη.

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x} \log^2 x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. ($0,7 + 0,8 = 1,5$ μον.) (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt, \quad \text{για κάθε } x \geqslant 0.$$

Να δείξετε ότι (i) η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και (ii) $f(x) = x$ για κάθε $x \geqslant 0$.

5. ($1,2 + 0,6 + 0,7 = 2,5$ μον.) (α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\, dx \qquad \text{(ii)} \int x^3 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

(β) (i) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

(ii) Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ συγκλίνει και ότι $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} \leqslant \frac{5}{e}$.

6. ($1 + 1 = 2$ μον.) (α) Να βρείτε τη σειρά Taylor με κέντρο το 0 της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ και να αποδείξετε ότι η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ αν } x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(0) = 1.$$

Να αποδείξετε ότι η g έχει παράγωγο κάθε τάξης και να υπολογίσετε την $g^{(10)}(0)$.

Καλή Επιτυχία!

$\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln^2 x + \sqrt{x}\, 2\ln x \frac{1}{x}$

Θ1

Πρόχειρες λύσεις

(i) Ψευδής διότι $a_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0$ και $\sum a_\nu = \sum \frac{1}{\nu}$ αποκλίνει

(ii)

iii

Έχουμε $\cancel{0 < a_\nu < a_\nu^{3/2} \Leftrightarrow 1 < a_\nu^{1/2} \Leftrightarrow 1^2 < a_\nu}$

$\Leftrightarrow a_\nu$

$0 < a_\nu^{3/2} < a_\nu \Leftrightarrow a_\nu^{1/2} < 1 \Leftrightarrow a_\nu < 1$ που

ισχύει αφού $a_\nu \to 0$

ii) Έστω $\sum \frac{1}{\nu}$ που ξέρουμε ότι αποκλίνει.

όμως η υπακολουθία της

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3} \cdots\cdots \to \sum \frac{1}{2^\nu}$

συγκλίνει!

(B). Θεωρούμε $a_\nu = (-1)^\nu$ $\quad B_\nu = -(-1)^\nu$

$\limsup(a_\nu + B_\nu) = \lim\sup 0 = 0$

$\lim\sup(a_\nu) + \limsup(B_\nu) = 1 + 1 = 2$

θ2.

i) $\sum \frac{\nu!}{\nu^{\nu}}$

Δουλεύοντας με το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}}}{\frac{\nu!}{\nu^{\nu}}} = \dots = \frac{\nu^{\nu}}{(\nu+1)^{\nu}} = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu} =$$

$$= \left(\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu}\right)^{-1} = \left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right]^{-1} \longrightarrow e^{-1}<1$$ άρα συγκλίνει.

ii) Δουλεύουμε με το κριτήριο συμπύκνωσης

Έχουμε: $\sum \frac{\ln \nu}{\nu^2}$ συγκλίνει ανν

$$\sum 2^{\nu} \frac{\ln 2^{\nu}}{(2^{\nu})^2} = \sum \cancel{2^{\nu}} \frac{\nu \ln 2}{(2^{\nu})^{\cancel{2}}} = \sum \frac{\nu \ln 2}{2^{\nu}}$$

$$= \ln 2 \sum \frac{\nu}{2^{\nu}}$$ συγκλίνει ανν

ν-οστή ρίζα $\sqrt[\nu]{\frac{\nu}{2^{\nu}}} = \frac{\sqrt[\nu]{\nu}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}<1$ Σ.

iii) $\sum \frac{1}{\nu^{1+\frac{1}{\nu}}} = \sum \frac{1}{\nu\, \nu^{1/\nu}}$ τη συγκρίνουμε με $\sum \frac{1}{\nu}$ αποκλίνει.

Δουλεύουμε με το οριακό κριτήριο λόγου 2 σειρών

$$\frac{a_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\nu}\frac{1}{\nu^{1/\nu}}} = \frac{1}{\frac{1}{\nu^{1/\nu}}} = \sqrt[\nu]{\nu} \longrightarrow 1 \in (0,+\infty).$$

άρα αποκλίνει και η αρχική

Θ-2

(B) Η σειρα $\sum (-1)^{\nu-1} ημ\frac{1}{\nu}$ ειναι

- εναλασσουσα
- $a_\nu = ημ\frac{1}{\nu} \downarrow$
- $a_\nu \to 0$

αρα απο κριτηριο L, συγκλινει

Ομως $$\sum \left|(-1)^{\nu-1} ημ\frac{1}{\nu}\right| = \sum ημ\frac{1}{\nu} = \sum \underbrace{\frac{ημ\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\nu}}\,\frac{1}{\nu}}_{\beta_\nu}$$

συγκρινομενη με τη σειρα $\sum \frac{1}{\nu} = \sum \gamma_\nu$.

βρισκουμε οτι $\lim \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu} = 1 \Rightarrow$ συμπεριφερονται ομοια και επειδη η $\sum \frac{1}{\nu}$ αποκλινει αποκλινει και η $\sum ημ\frac{1}{\nu}$.

Θ3

α) Εχουμε $|f(x) - f(x_0)| \le L|x - x_0|$

$\Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \le L$ λιμαροντας εχουμε

$|f'(x_0)| \le L$ ο.ε.δ.

β) Εστω $f'(x)$ φραγμ. απο ΘΜΤ

$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \le L|x - y|$

//// Θ3β ////

• η f συνεχής στο $[0,+\infty)$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\ln^2 x = \lim \dfrac{(\ln x)^2}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{L.H}{=}$

$$\overset{L.H}{=} \lim \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}} = \lim \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}\,\cancel{x}}}$$

$$= -4\lim \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{L.H}{=} -4\lim \frac{1/x}{-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}}$$

$$= 4\lim \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}} = 0 \in \mathbb{R}$$

οπότε από βασικό θεώρημα f

ομοιόμορφα συνεχής

Θ4

α) Θεώρημα μέσης τιμής, που $\xi \in [\alpha, \beta]$

β) Από τον δοσμένο τύπο έχουμε

$$f(x) = \pm \sqrt{2\int_0^x f(t)\,dt}$$

που σημαίνει ότι η f παραγωγίσιμη

σαν πράξη παραγωγίσιμων

και παραγωγίζοντας τη δοσμένη έχουμε

$$2f(x)f'(x) = 2f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)f'(x) - f(x) = 0$$

Άρα $\Rightarrow f(x)[f'(x) - 1] = 0$, $f(x) \neq 0$ $\Big\}$ $f'(x) = 1$

$f(x) = x + c$ (α)

Πάμε στην αρχική και βάζουμε $x=0$

οπότε $(f(0))^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ (β)

από (α), (β) $f(0) = 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

οπότε $f(x) = x$

Θ5

(i)

Σχυυμε για τον παρονομαστη

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$$

οποτε

$$\frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{x}{(x+1)^2+1} \quad \text{και}$$

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{x}{(x+1)^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{Θετουμε} \\ x+1=y \Rightarrow x=y-1 \\ \text{και} \\ dx=dy\end{array}\right]$$

$$= \int \frac{y-1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{y}{y^2+1}\,dy - \int \frac{1}{y^2+1}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(y^2+1)'}{y^2+1}\,dy - \text{τοξεφ}\,y = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \text{τοξεφ}\,y.$$

. . . . .

ii) Αλλαγη μεταβλητης σε μια ευκολη πιο πολυ.

Θετουμε $\sqrt{1-x^2} = y \Rightarrow 1-x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 = 1-y^2$
$\Rightarrow 2x\,dx = -2y\,dy$

οποτε

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int x^2\sqrt{1-x^2}\;x\,dx = \int (1-y^2)\,y\,(-y)\,dy$$

$$= -\int (1-y^2)y^2\,dy = -\int (y^2-y^4)\,dy =$$

$$= -\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + c = \dots$$

Θέμα 5 β

Θα υπολογίσουμε αρχικά το $I=\int e^{-\sqrt{x}}dx$

θέτουμε $y=\sqrt{x} \Rightarrow y^2=x \Rightarrow 2y\,dy=dx$

οπότε $I=\int e^{-y}\cdot 2y\,dy =$ (με ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

$=-2\int (e^{-y})'\, y\, dy = -2\left[e^{-y}y-\int e^{-y}dy\right]=$

$=-2e^{-y}y-2e^{-y}+c$.

οπότε $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-2(e^{-y})(y+1)\right]_1^t$

$=-2\left[\dfrac{y+1}{e^{y}}\right]_1^t{}_{t\to+\infty} = -2\left[-\dfrac{2}{e}\right] = \dfrac{4}{e}$.

Ισχύει $f(x)=e^{-\sqrt{x}}\downarrow$ διότι $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}<0$

οπότε από το κριτήριο του ολοκληρώματος

η $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ συγκλίνει ομοίως και

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu) \le f(1)+\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}$$

$$=\frac{1}{e}+\frac{4}{e}=\frac{5}{e}$$

66

(a)

$f(x)=\eta\mu x \longrightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=1 \quad f'(0)=1$

$f''(x)=-\eta\mu x=\eta\mu\left(2\frac{\pi}{2}+x\right)=0 \quad f''(0)=0$

$f'''(x)=-\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\left(3\frac{\pi}{2}+x\right) \Rightarrow f'''(0)=-1$

$f^{(4)}(x)=\eta\mu x=\eta\mu\left(4\frac{\pi}{2}+x\right) \Rightarrow f^{(4)}(0)=0, \ldots$

Επαγωγικά $f^{(\nu)}(x)=\eta\mu\left(\nu\frac{\pi}{2}+x\right)$

οπότε το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά είναι

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3\ldots$$

$$=\frac{1}{1!}x+0-\frac{1}{3!}x^3\ldots\frac{1}{5!}x^5$$

με υπόλοιπο

$$R_\nu=\frac{f^{(\nu+1)}(\xi)}{\nu+1!}x^{\nu+1}$$

με ξ μεταξύ $0, x$.

$$\underset{\nu\to\infty}{|R_\nu|}=\frac{\left|\eta\mu\left((\nu+1)\frac{\pi}{2}+\xi\right)\right|}{(\nu+1)!}|x^{\nu+1}|\le\frac{|x|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\xrightarrow{*}0$$

* με το κριτήριο του λόγου $\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|$ δείχνουμε ότι $\to 0$.

HHI Θ-6 HHI

πράγματι.

$$a_\nu = \frac{|x|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}$$

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\dfrac{|x|^{\nu+2}}{(\nu+2)!}}{\dfrac{|x|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}} = \frac{|x|}{\nu+2} \to 0$$

άρα $\lim\limits_{\nu\to+\infty} |R_\nu| = 0.$

Διαιρώντας την σειρά ημx = με x και

με x και τα 2 μέλη έχουμε

$$g(x)\quad \frac{\eta\mu x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 - \frac{1}{11!}x^{10}$$

όποτε $g^{(10)}(0) = -\frac{1}{11!}$!.

Χρυσοχόλια!!!

Γ. Σπ[illegible]