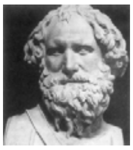*ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ*

1. ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Ακολουθίες είναι οι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$, γράφουμε $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Για λόγους συντομίας αντί να γράφουμε $a(n)$ (όπως π.χ. $f(x)=x^2$) χρησιμοποιούμε $a_n=n^2$.

Παράδειγμα 1.1:

$f(x)=x^2$ με $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=1, f(2)=4, f(\sqrt{2})=2$. Αντίστοιχα στις ακολουθίες γράφουμε

$a_n=n^2, n\in\mathbb{N}$ με $a_1=1, a_2=4, a_3=9$

Όμοια αν θεωρήσουμε $a_n=\sqrt{n}, n\in\mathbb{N}$, τότε γράφουμε $a_1=1, a_2=\sqrt{2}, a_3=\sqrt{3}$.

Στις ακολουθίες μας ενδιαφέρει η εύρεση ορίου καθώς το $n\to+\infty$. Ο ακριβής ορισμός του ορίου θα δοθεί σε επόμενη παράγραφο, διαισθητικά εδώ θα πούμε ότι η ακολουθία συγκλίνει, αν καθώς το n παίρνει πολύ μεγάλες τιμές η ακολουθία ‘σταθεροποιείται’ σε έναν πραγματικό αριθμό l, το όριο της ακολουθία. Η αναζήτηση ορίου $n\to n_0$ πχ $n\to 2$ δεν έχει νόημα στους φυσικούς.

Για τον υπολογισμό ορίων στο άπειρο $(+\infty)$ γενικά υπάρχει μια αρχή που χιουμοριστικά θα την πούμε καπιταλιστική: ‘Ο Δυνατότερος τους τρώει όλους.’

π.χ.2 Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}(n^3+3n+2)=\lim_{n\to+\infty}n^3\left(1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)=(+\infty)\cdot(1+0+0)=+\infty$$

<u>**Α. ΡΗΤΟΙ**</u>

π.χ.(1):

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+3n+2}{n^4+5n+6}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{n^4\left(1+\frac{5}{n^3}+\frac{6}{n^4}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{5}{n^3}+\frac{6}{n^4}\right)}=0\cdot\frac{(1+0+0)}{(1+0+0)}=0\cdot 1=0$$

π.χ.(2):

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+2n+1}{n^2-5n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}n\cdot\frac{\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=(+\infty)\cdot\frac{(1+0+0)}{(1+0+0)}=(+\infty)\cdot 1=+\infty$$

π.χ.(3):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-5n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}-5n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}-5\right)=$$

$$(+\infty)\cdot\left(\sqrt{(1+0+0)}-5\right)=(+\infty)\cdot(-4)=-\infty$$

Όμως,

π.χ.(4):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{25n^2+n+1}-5n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{25n^2+n+1-25n^2}{\sqrt{25n^2+n+1}+5n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(\sqrt{25+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+5\right)}=\frac{1+0}{5+5}=\frac{1}{10}$$

π.χ.(5):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}=\frac{1+0}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Β. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

α' περίπτωση

$\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\to\infty$ (Μεθοδολογία: ‘Εγκλεισμός)

$$\lim\frac{\sin(n)}{n}$$

$0\le\left|\frac{\sin(n)}{n}\right|\le\frac{1}{n}$. Επειδή $1/\mathrm{n}\to 0\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n}=0$.

π.χ.(2):

$$\lim \frac{\cos\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n}}$$

$$0 \le \left| \frac{\cos\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

β' περίπτωση

$\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha \to 0$

Μεθοδολογία: Ανάγουμε το όριο στην μορφή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

π.χ.(1): $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x_n=\frac{1}{n}\to 0} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$

π.χ.(2): $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x_n=\frac{1}{n}\to 0} n\cdot\frac{\sin(x_n)}{x_n} = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$

π.χ.(3): $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \lim\limits_{x_n=\frac{1}{n^3}\to 0} \frac{1}{n}\cdot\frac{\sin(x_n)}{x_n} = 0\cdot 1 = 0$

π.χ.(4): $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{x_n=\frac{1}{n^2}\to 0} n\cdot\frac{\sin(x_n)}{x_n} = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$

Γ. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ

Bernoulli

$(1+a)^n \ge 1+na, a>-1$

(1)

$$\alpha_n = \lambda^n$$

(i) $\lambda > 1 : \alpha_n \to \infty$

Απόδειξη: $\lambda > 1 \Rightarrow \exists\omega > 0 : \lambda = 1+\omega \Leftrightarrow \lambda^n = (1+\omega)^n \overset{(1)}{\ge} 1+n\cdot\omega \ge n\cdot\omega \to \infty$.

Επομένως, $\lambda^n \to \infty$.

π.χ.(1): $2^n \to +\infty$

π.χ.(2): $\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$

(ii) $\lambda = 1 : \alpha_n = 1^n = 1$. Επομένως, $\alpha_n \to 1$.

(iii) $|\lambda| < 1 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 1 : \alpha_n \to 0$

Απόδειξη: • $\lambda = 0 \rightsquigarrow 0^n = 0 \to 0$

• $\lambda \neq 0 \rightsquigarrow |\lambda| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\lambda|} > 1 \Rightarrow (\frac{1}{|\lambda|})^n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{|\lambda|^n} \to \infty \Rightarrow \lambda^n \to 0$

π.χ.(1): $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$

π.χ.(2): $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \to 0$

(iv) $\lambda = -1 : \alpha_n = (-1)^n \xrightarrow{n-\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma} 1 \to 1$

$\xrightarrow{n-\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} -1 \to -1$

Επομένως, το όριο ΔΕΝ υπάρχει.

(v) $\lambda < -1$

π.χ. $\alpha_n = (-5)^n = (-1)^n \cdot 5^n \xrightarrow{n-\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma} +\infty$

$\xrightarrow{n-\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} -\infty$

Επομένως, το όριο ΔΕΝ υπάρχει.

$\boxed{\sqrt[n]{\alpha} \to 1 \#}$

Απόδειξη: • $\alpha > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha} > 1 \Rightarrow \exists \omega_n > 0 : \sqrt[n]{\alpha} = 1 + \omega_n$

$$a = \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = (1+\omega_n)^n \geq 1 + n \cdot \omega_n \geq n \cdot \omega_n$$

$\alpha \geq n \cdot \omega_n \Leftrightarrow \frac{\alpha}{n} \geq \omega_n > 0$. Άρα, $\omega_n \to 0$.

Επομένως, $\sqrt[n]{\alpha} = 1+\omega_n \to 0$.

- $0<\alpha \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha} \ge 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\dfrac{1}{\alpha}} \ge 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1$

$$\boxed{\sqrt[n]{n} \to 1}$$

Απόδειξη: $n \ge 1 \Rightarrow \sqrt[2n]{n} \ge 1 \Rightarrow \exists \omega_n > 0 : \sqrt[2n]{n} = 1+\omega_n$

$$\sqrt{n} = \left(\sqrt[2n]{n}\right)^n = \left(1+\omega_n\right)^n \ge 1+n\cdot\omega_n \ge n\cdot\omega_n$$

$$\sqrt{n} \ge n\cdot\omega_n \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{n} \ge \omega_n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \omega_n \ge 0$$. Άρα, $\omega_\nu \to 0$.

Επομένως, $\sqrt[2n]{n} = 1+\omega_n \Rightarrow \sqrt[n]{n} = (1+\omega_n)^2 = 1+2\omega_n+\omega_n{}^2 \to 1$

$\sqrt[n]{\mathrm{P}_\kappa(n)} \to 1$, όπου $\mathrm{P}_\kappa(\mathrm{n})$ πολυώνυμο κ – βαθμού

(*το χρησιμοποιούμε πάντα με απόδειξη*)

π.χ.(1): $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1} =$;

$1 \le n^2+n+1 \le 3n^2$

$\Rightarrow 1 \le \sqrt[n]{n^2+n+1} \le \sqrt[n]{3n^2}$

$\Rightarrow 1 \le \sqrt[n]{n^2+n+1} \le \sqrt[n]{3}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2$

Επομένως, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1} = 1$.

π.χ.(2): $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^7+3n+2} =$;

$1 \le n^7+3n+2 \le 3n^7 \Rightarrow 1 \le \sqrt[n]{n^7+3n+2} \le \sqrt[n]{6n^7}$

$\Rightarrow 1 \le \sqrt[n]{n^7+3n+2} \le \sqrt[n]{6}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^7 \to 1\cdot 1^7$

Επομένως, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^7+3n+2} = 1$.

π.χ.(3): $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^3+4n+2} = \;;$

$$1 \le n^3+4n+2 \le 3n^3 \Rightarrow 1 \le \sqrt[n]{n^3+4n+2} \le \sqrt[n]{7n^3}$$
$$\Rightarrow 1 \le \sqrt[n]{n^3+4n+2} \le \sqrt[n]{7}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \to 1\cdot 1^3$$

Επομένως, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^3+4n+2} = 1$.

π.χ.(4): $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2^n+3^n+4^n} = \;;$

$$4^n \le 2^n+3^n+4^n \le 3\cdot 4^n \Rightarrow \sqrt[n]{4^n} \le \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \le \sqrt[n]{3\cdot 4^n}$$
$$\Rightarrow 4 \le \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \le \sqrt[n]{3}\cdot 4$$

Επομένως, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2^n+3^n+4^n} = 4 = \max\{2,3,4\}$.

π.χ.(5): $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2^n+3^n} = \;;$

$$3^n \le 2^n+3^n \le 2\cdot 3^n \Rightarrow \sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le \sqrt[n]{2\cdot 3^n}$$
$$\Rightarrow 3 \le \sqrt[n]{n^2+n+1} \le \sqrt[n]{2}\cdot 3$$

Επομένως, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2^n+3^n} = 3$.

Δ. Κριτήριο Λόγου

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \ldots = l \to \begin{cases} l<1 \Rightarrow \alpha_n \to 0 \\ l=1 \Rightarrow \textit{άλλος τρόπος} \\ l>1 \Rightarrow \alpha_n \to +\infty \end{cases}$$ (Κατά προτίμηση στα παραγοντικά)

Ε. Κριτήριο ν-οστής Ρίζας

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=\ldots=l\to\begin{cases} l<1\Rightarrow \alpha_n\to 0\\ l=1\Rightarrow \acute{\alpha}\lambda\lambda o\varsigma\ \ \tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma \ \text{(Κατά προτίμηση στις ν-οστες δυνάμεις)}\\ l>1\Rightarrow \alpha_n\to+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\,\#$$

ΘΥΜΑΜΑΙ

$$(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)=n!\cdot(n+1)$$

$$\lim_{a_n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

π.χ.(1): $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e$

π.χ.(2): $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

π.χ.(3): $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2^n}=\ ;$

1ο τρόπος:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 2^n}{2^n\cdot 2\cdot n^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}<1$$

Επομένως, $\frac{n^2}{2^n}\to 0$.

- 2ος τρόπος: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}<1$

Επομένως, $\frac{n^2}{2^n}\to 0$

π.χ.(4): $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=\ ;$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)\cdot n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)\cdot n!}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

Επομένως, $\frac{n!}{n^n}\to 0$. Άρα, $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.